ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LẠI THỊ THÚY HẢI

PHƯƠNG TRÌNH HÀM VÀ MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ HỌC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LẠI THỊ THÚY HẢI

PHƯƠNG TRÌNH HÀM VÀ MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ HỌC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: **Phương pháp Toán sơ cấp**

Mã số: **8460113**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TSKH. HÀ HUY KHOÁI

Thái Nguyên - 2018

Mục lục

Lời cảm ơn

Trước hết, tác giả muốn tỏ lòng biết ơn đến người hướng dẫn khoa học của mình, GS.TSKH. Hà Huy Khoái (Trường Đại học Thăng Long), người đã đặt bài toán của đề tài, tận tình hướng dẫn để luận văn này được hoàn thành tốt đẹp.

Nhân dịp này, tác giả xin được cảm ơn Ban Giám hiệu Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Ban Chủ nhiệm Khoa Toán–Tin, cùng các giảng viên đã tham gia giảng dạy lớp Cao học Toán khóa 10 (2016-2018).

Xin trân trọng cảm ơn Sở Giáo dục và Đào tạo Hải Phòng, Ban Giám hiệu và các đồng nghiệp ở Trường THPT Phạm Ngũ Lão, Thủy Nguyên, Hải Phòng, đã tạo mọi điều kiện thuận lợi để tác giả học tập và nghiên cứu.

Lời cuối cùng, tác giả muốn dành để tri ân bố mẹ và gia đình vì đã chia sẻ những khó khăn để tác giả hoàn thành công việc học tập của mình.

Danh sách kí hiệu

$\#X$	lực lượng của tập hợp X
$\lceil x \rceil$	trần của số x
$\lfloor x \rfloor$	sàn của số x
$a \mid b$	b là bội của a
$a \nmid b$	a không phải là ước của b
$\sigma(n)$	tổng các ước của n
$v_p(n)$	lũy thừa cao nhất của p chia hết n
$\phi(n)$	hàm Euler, $\phi(n) = n \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$
$\zeta(s)$	hàm zeta (ζ) Riemann, $\zeta(s) = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$, $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ và $\sigma > 1$
$\limsup$	giới hạn trên
$\liminf$	giới hạn dưới

Mở đầu

Có thể nói, Lý thuyết số là một ngành khoa học sớm nhất của nhân loại. Trước những năm 70 của thế kỷ XX, Lý thuyết số được coi là một ngành thuần túy lý thuyết, còn hiện nay Lý thuyết số đang trở thành một trong những lĩnh vực có nhiều ứng dụng sôi động nhất của Toán học.

Trong Lý thuyết số, các hàm số học là những hàm số xác định trên tập hợp các số tự nhiên và có tập giá trị là một tập con nào đó của tập hợp các số phức. Các điều kiện được đặt lên các hàm số học sẽ phụ thuộc vào mục đích nghiên cứu. Như Hardy & Wright từng yêu cầu, một hàm số học phải "thể hiện một số tính số học của n".

Luận văn này có mục đích nghiên cứu một mối quan hệ về hàm số học là tổng các ước của một số nguyên cho trước, và sau cùng là bậc cực trị của một số lớp hàm số học quan trọng.

Ngoài các phần Mở đầu, Kết luận, Tài liệu tham khảo, nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương:

- *Chương 1. Phương trình hàm đối với hàm tổng các ước.* Nội dung của chương này là nghiên cứu về nghiệm nguyên dương của $\sigma(n) = \gamma(n)^2$, trong đó $\sigma(n)$ và $\gamma(n)$ tương ứng là tổng của các ước và tích của các ước nguyên tố phân biệt của n.

- *Chương 2. Bậc cực trị của một số hàm số học.* Chương này dành để trình bày về để chuỗi Dirichlet của $V(n)$ (số các số chính quy modulo n) và xác định các bậc cực trị của một số hàm số học cổ điển, các hàm tổng các ước đơn của n (ước d của n được gọi là đơn nếu n và n/d nguyên tố cùng nhau) và liên hệ với hàm ϕ-Euler.

Thái Nguyên, ngày 22 tháng 4 năm 2018

Tác giả

Lại Thị Thúy Hải

Chương 1

Phương trình hàm đối với hàm tổng các ước

Chương này dành để nghiên cứu các số nguyên $n > 1$ thỏa mãn quan hệ $\sigma(n) = \gamma(n)^2$, trong đó $\sigma(n)$ và $\gamma(n)$ tương ứng là tổng các ước và tích các ước nguyên tố phân biệt của n. Ta sẽ chứng minh rằng nghiệm có không quá bốn ước nguyên tố phân biệt duy nhất là $n = 1782$. Ta cũng sẽ chỉ ra không tồn tại nghiệm nào không có ước là lũy thừa bậc 4, và số nghiệm nhỏ hơn x là không vượt quá $x^{1/4+\epsilon}$ với $\epsilon > 0$ và với mọi $x > x_\epsilon$. Thêm nữa, số n được gọi là nguyên thủy nếu không có ước đơn thực sự d nào của n thỏa mãn $\sigma(d) \mid \gamma(d)^2$. Ta sẽ chỉ ra số nghiệm nguyên thủy của phương trình không vượt quá x là nhỏ hơn x^ϵ với $x > x_\epsilon$.

Nội dung chương này được viết dựa vào tài liệu Broughan A.K. *et al* [3].

1.1 Giới thiệu

Tại hội nghị khoa học "Western Number Theory Conference"[1] năm 2000, De Koninck J.-M. (tác giả thứ hai của công trình Broughan A.K. *et al* [3]) đưa ra câu hỏi về tìm nghiệm nguyên dương n của phương trình

$$\sigma(n) = \gamma(n)^2 \tag{1.1}$$

[1] Hội nghị Lý thuyết số Bờ Tây, `https://westcoastnumbertheory.org/`

(gọi là "phương trình De Koninck"), trong đó $\sigma(n)$ là tổng tất cả các ước dương của n, và $\gamma(n)$ là tích tất cả các ước nguyên tố phân biệt của n, cũng được gọi là *"cốt lõi"* (core) của n. Dễ thấy, $n = 1$ và $n = 1782$ là các nghiệm, nhưng, tình đến năm 2012 - năm xuất bản công trình Broughan A.K. *et al* [3] - người ta không biết thêm một nghiệm nào nữa. Một tìm kiếm bằng máy tính với mọi $n \leqslant 10^{11}$ không cho thấy nghiệm nào khác. Một giả thuyết tự nhiên (được gọi là "Giả thuyết De Koninck") là *phương trình này không có nghiệm nào khác*. Nó được trình bày bởi Guy R.K. (2004).

Có một kết quả đã được chứng minh rằng một nghiệm bất kỳ không tầm thường n phải có ít nhất ba ước nguyên tố, chẵn, và không thể là số *hoàn toàn không chính phương* (tạm dịch thuật ngữ *squarefree* - số không có ước chính phương khác 1). Luca F. (2004) chỉ ra rằng số nghiệm mà số các ước nguyên tố là số cố định cho trước chỉ là hữu hạn. Thật ra Luca F. đã chứng điều này cho lớp rộng hơn các nghiệm dương n của phương trình $\sigma(n) = a\gamma(n)^K$ trong đó $K \geqslant 2$ và $1 \leqslant a \leqslant L$ với K và L là các tham số cố định. Tuy nhiên, có rất ít tiến bộ trong nghiên cứu Giả thuyết De Koninck.

Ở đây, luận văn sẽ trình bày kết quả nói rằng các nghiệm $n = 1, 1782$ là các số duy nhất có $\omega(n) \leqslant 4$, trong đó như thường lệ, $\omega(n)$ là số ước nguyên tố phân biệt của n. Phương pháp chứng minh dựa vào các chặn trên sơ cấp đối với những số mũ có thể của các số nguyên tố xuất hiện trong phân tích của n, và sử dụng kết thức để giải hệ phương trình đa thức thu được, mà các ẩn là các ước nguyên tố của n.

Ta chứng minh rằng nếu một số nguyên n là không có ước là luỹ thừa bậc 4 (fourth power free) (tức là $p^4 \nmid n$ với mọi số nguyên tố p), thì n không thể thỏa mãn phương trình De Koninck (1.1). Sau đó chúng ta đếm số nghiệm tiềm năng n không vượt quá x. Pollack & Pomerance [4], gọi một số nguyên dương n là *nguyên tố–hoàn hảo* (*prime–perfect*) nếu n và $\sigma(n)$ chung nhau tập hợp các ước nguyên tố. Rõ ràng, mọi nghiệm n của phương trình De

Koninck là số nguyên tố–hoàn hảo. Pollack & Pomerance chứng minh rằng tập hợp các số nguyên tố–hoàn hảo là vô hạn, và hàm đếm các số nguyên tố–hoàn hảo $n \leqslant x$ có lực lượng nhiều nhất là $x^{1/3+o(1)}$ khi $x \to \infty$. Sử dụng các kết quả của Pollack & Pomerance, ta sẽ chứng minh rằng số các nghiệm $n \leqslant x$ của phương trình De Koninck nhiều nhất là $x^{1/4+\epsilon}$ với bất kỳ $\epsilon > 0$ và mọi $x > x_\epsilon$.

Bằng cách hạn chế đến *nghiệm "nguyên thủy"* ("primitive" solutions) sử dụng phương pháp của Wirsing E., ta nhận được một chặn trên của $O(x^\epsilon)$ với mọi $\epsilon > 0$. Khái niệm "nguyên thủy" được sử dụng ở đây để chỉ các số không có ước đơn thực sự $d \mid n$ thỏa mãn $\sigma(d) \mid \gamma(d)^2$.

Cuối cùng ta có một số nhận xét về bài toán liên quan là xác định các số số nguyên n sao cho $\gamma(n)^2 \mid \sigma(n)$.

Tóm lại, mục đích của chương này là trình bày một số sự kiện ủng hộ cho Giả thuyết De Konnick, và chỉ ra cấu trúc cần thiết cho một phản ví dụ, nếu có.

Mọi nghiệm không tầm thường khác với 1782 phải là chẵn, có một ước nguyên tố lũy thừa 1 và có thể có một ước nguyên tố với một số mũ đồng dư với 1 mod 4, với các ước nguyên tố lẻ khác có các lũy thừa chẵn. Ít nhất một ước nguyên tố phải xuất hiện với một số mũ 4 hoặc cao hơn. Cuối cùng, mọi phản ví dụ, nếu có, phải lớn hơn 10^{11}.

1.2 Một số ký hiệu và kiến thức chuẩn bị

Giả sử $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} > 1$ là một số nguyên dương và giả sử $k \geqslant 1$ là một số nguyên nào đó. Trong suốt chương này là sẽ sử dụng các ký hiệu sau:

- $p_1, p_2, \ldots$ — dãy các số nguyên tố;
- $\sigma(n)$ là hàm tổng các ước;